Qiskit Fall Fest 2025 @ Yonsei

Intro to Linear Algebra

Nov. 1, 2025

김해성
물리학과 22학번 goodnew0923@yonsei.ac.kr

QIYA

Introduction

Introduction

- Name : Haeseong Kim
- Department : Physics
- 3rd-year Undergraduate

Research

- Research Field: Computational Structural Biology,
  Quantum Optimization
- Research Interests: Quantum Annealing
- Research Focus: MIQP-QUBO conversion

CONTENTS

01. Matrix

원소들을 직사각형의 배열로 나열한 것으로서, 가로줄을 행(row), 세로줄을 열(column)이라고 한다.
연립일차방정식 풀이를 간단하게 묘사하기 위해서 만들어졌으며, 이후 여러가지 연산들에 사용되고 있다.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 7y = 12 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 02 & 93 & 05 \\ 05 & 07 & 12 \end{bmatrix}$$

01. Matrix

정의

- 가로 세로로 배치된 성분 $a_{m,n}$ 이 존재
- 세로를 행이라 하며 그 개수를 M개라 정의하고, 가로를 열이라 하며 개수는 N개라 가정할 시
- ‘m×n 행의 형태로 주어진다‘ 라고 명명한다.

- 이러한 행렬은 다음과 같이 표시하거나
  대문자 기호로 표현되기도 한다.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \cdots & a_{M,N} \end{pmatrix} \quad A_{ij}$$

QIYA

01. Matrix

행렬의 연산

- 덧셈, 뺄셈, 곱셈의 연산을 진행할 수 있다.
- 덧셈 뺄셈의 경우에는 m×n 크기가 서로 같은 경우에 성립한다
- 각 성분끼리 덧셈, 뺄셈을 진행하면 된다.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

01. Matrix

행렬의 연산

- 곱셈의 경우에는 앞 행렬의 열 개수 = 뒤 행렬의 행 개수인 경우에 성립한다.
- 앞 행렬 a번째 행의 n 번째 원소와 뒤 행렬 b번째 열의 n 번째 원소를 곱한 것을 n=1부터 n=N까지 모두 더한 것이 행의 곱의 a번째 행, b번째 열의 원소 값이 된다.
- 각 성분끼리 덧셈, 뺄셈을 진행하면 된다.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ cd + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

02. 여러가지 Matrix

전치 행렬 (Transpose Matrix)

- 원래 행렬에서 행과 열을 서로 바꿔버린 행렬
- 행과 열이 서로 동일할 경우, 행렬의 주대각선을 기준으로 선대칭한 행렬
- 전치 행렬의 전치 행렬은 원래 행렬과 같다.

$$(A_{ij})^T = A_{ji}$$

- 전치 행렬은 다음과 같은 대문자 기호로 표시된다.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

02. 여러가지 Matrix

QISKIT 2025 2025 FALL FEST

복소 전치 행렬 (Conjugate Transpose Matrix)

- 원래 행렬에서 행과 열을 서로 바꿔버린 행렬 + 원소가 켤레복소수로 바뀜
- 즉 먼저 행렬의 모든 원소를 켤레복소수로 바꾼 후 전치행렬로 변환했다고 보면 된다.
- 복소 전치 행렬의 복소 전치 행렬은 원래 행렬과 같다.

$$(A_{ij})^{+} = \left(A_{ij}^{\times}\right)^{T}$$

- 복소 전치 행렬은 다음과 같은 대문자 기호로 표시된다.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow A^{+} = \begin{bmatrix} a^{\times} & c^{\times} \\ b^{\times} & d^{\times} \end{bmatrix}$$

QIYA

02. 여러가지 Matrix

항등 행렬 (Identity Matrix)

- 행과 열이 서로 동일한 경우, 정사각 행렬 (Square Matrix) 라고 부른다.
- 정사각 행렬에서의 대각선을 주대각선 (main diagonal) 이라고 부른다.
- 주대각선에서만 원소 1을 가지고 있고 나머지 행렬의 원소가 0인 행렬을 항등 행렬이라고 한다.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

역행렬 (Inverse Matrix)

- 원래 행렬과 해당 행렬을 곱했을 때 항등 행렬이 나오는 행렬을 뜻한다.
- 여러 가지 방법을 이용해서 역행렬을 구할 수 있다.

$$AB = I, B = A^{-1}$$

QISKIT 2025 FALL FEST 2025

QIYA

03. Vector

정의

- 크기와, 방향을 동시에 가지고 있는 물리량
- 열벡터, 행벡터로서 행렬로 기술이 가능하다.
- 문자 위에 화살표로서 표시하거나, 문자를 굵게 표시하는 경우가 있다.
  양자 정보에서는 Dirac notation 이라는 표기 법을 자주 사용한다.

$$\vec{a} \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

Dirac Notation

- 열벡터를 ket vector로 명명하고 다음과 같이 표현한다.
- 행벡터를 bra vector로 명명하고 다음과 같이 표현한다.
- ket vector와 bra vector는 다음과 같은 관계가 있다.

$$\Psi\rangle \qquad \langle\Psi$$

$$\langle\Psi = (\Psi\rangle)^{+}$$

03. Vector

내적 (Inner Product)

- 두 벡터의 n번째 원소끼리의 곱을 n=1 부터 n=N까지 모두 더한 값
- 크기만 가지는 스칼라가 된다는 것이 특징이다.
- Dirac Notation으로는 다음과 같이 표현할 수 있다..
- 두 벡터의 내적의 값이 0일 경우, orthogonal 이라고 명명한다.

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

$$\langle a \ b \rangle$$

크기 (2-Norm)

- 복소수인 경우. 복소수와 켤레복소수를 곱하고 제곱근을 취한다.
- 벡터의 경우 같은 두 벡터를 서로 내적한다.
- 따라서 다음과 같은 관계식이 유도된다.

$$\langle a \ a \rangle$$

04. Determinent

행렬식

- 2X2행렬에서는 행렬의 넓이를 구하기 위해서
- 3X3행렬에서는 행렬의 부피를 도출하기 위해서 고안된 방법이다.
- 역함수, Eigenvalue를 구할 때 사용되는 방법이기도 하다.

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

05. Eigenvalue, Eigenvector

정의

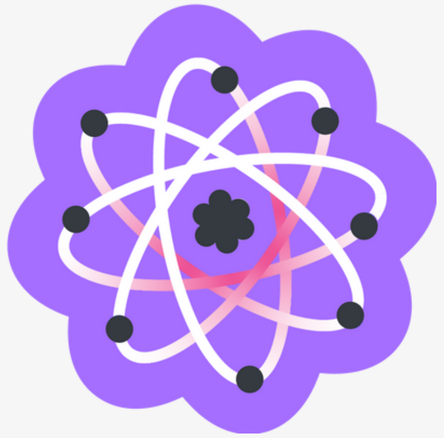
- 벡터에 행렬의 가했을 때, 그 벡터가 원래 벡터의 정수배일 경우
- 즉 벡터를 선형변환 하였을 때, 그 결과가 원레 벡터와 방향이 동일할 경우
- 이 때의 벡터를 Eigenvector, 이 때 그 배수를 Eigenvalue라고 한다.
  슈뢰딩거 방정식의 경우가 바로 이 관계에 해당하는 방정식이다.

$$H\Psi\rangle = E\Psi\rangle$$

직접 Eigenvalue, Eigenvector를 구해보자!

QISKIT 2025 2025 FALL FEST

THANK YOU



QIYA